

Loesungen

Grundlagen

➤ Vereinfache mithilfe der Potenz- und Wurzelgesetze die nachfolgenden Terme!

$$\bullet \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x^4}}{\sqrt{x^3}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^2}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^2}{x^{\frac{1}{2}} \cdot x} = x$$

$$\bullet \frac{-12 \cdot y^{\frac{4}{2}} \cdot y^{\frac{6}{3}}}{2 \cdot \sqrt{y} \cdot y^{-1/2}} = \frac{-12 \cdot y^2 \cdot y^2}{2 \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} = -6 \cdot y^2 \cdot y^2 = -6y^4$$

➤ Wende die Logarithmusgesetze an!

$$\bullet \ln\left(\frac{y^4}{x^3}\right) = \ln y^4 - \ln x^3 = 4 \ln y - 3 \ln x$$

$$\bullet \ln(x \cdot \sqrt{y-5z}) = \ln x + \frac{1}{2} \cdot \ln(y-5z)$$

➤ Löse die folgenden Gleichungen!

$$\bullet \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \ln x \Leftrightarrow \frac{15}{14} = \ln x \Leftrightarrow \exp\left(\frac{15}{14}\right) = x \Leftrightarrow x = 2,92$$

$$\bullet x^4 - 14x^2 + 49 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 7)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{7} \text{ und } x_2 = -\sqrt{7}$$

Funktionen

- Berechne mittels der Formel der geometrischen Reihe!

$$\sum_{k=0}^{15} 1,4^k = \frac{1-1,4^{16}}{1-1,4} = -\frac{216,80}{-0,4} = 541,99$$

- Es sind zwei Funktionen gegeben:

- $f(x) = \frac{1+2x}{1-3x}$

- $g(x) = \frac{1}{3+5x}$

Gib' die Verkettung der Funktionen an, d.h. bestimme $(f \circ g)(x)$!

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \frac{1+2 \cdot g(x)}{1-3 \cdot g(x)} = \frac{1+2 \cdot \left(\frac{1}{3+5x}\right)}{1-3 \cdot \left(\frac{1}{3+5x}\right)} = \frac{3+5x+2}{3+5x} : \frac{3+5x-3}{3+5x} = \\ &= \frac{5+5x}{3+5x} \cdot \frac{3+5x}{5x} = \frac{1+x}{x} \end{aligned}$$

- Sei f eine Funktion und c eine Konstante. Bitte gib' bei den nachfolgenden Aussagen jeweils an, ob diese richtig oder falsch sind!

- Falls $c > 0$ ist, dann gibt $f(x+c)$ eine Translation von f um c nach oben an.

FALSCH

- Falls $c > 0$ ist, dann gibt $f(cx)$ eine Streckung von f um c an.

FALSCH

- Falls $c = -1$ ist, dann gibt $cf(x)$ eine Spiegelung an der vertikalen Achse an.

FALSCH

Vektor– und Matrixrechnung

- Berechne das Volumen eines Kegels mit dem Grundflächenradius von 5cm und der Höhe von 6cm!

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 157,08$$

- Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$!

$$3 \cdot (-3) + (-5) \cdot 9 + 9 \cdot (-12) = -162$$

- Bestimme die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$!

$$3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) = 4$$

- Bestimme die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$!

$$-\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Stochastik und Hypothesentests

- In einer Urne liegen 5 rote, 3 blaue (B) und 2 gelbe Bälle. Du sollst nun drei Bälle, jeweils mit Zurücklegen, ziehen und die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass alle drei Bälle blaue sind.

$$P(BBB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{27}{1000} \approx 2,70\%$$

- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Du in einem zweistufigen Experiment zuerst beim Münzwurf eine „Zahl“ wirfst und dann in einem nachgelagerten Würfelspiel eine „Eins“ würfelst!

$$P(\text{Kopf}) = 0,5$$

$$P(X = 1) = 0,167$$

$$P(\text{Kopf} \cap 6) = P(\text{Kopf}) \cdot P(X = 1) = 0,5 \cdot 0,167 = 0,0835$$

Die Wahrscheinlichkeit entspricht 8,35%.

- Die Standardnormalverteilung ist eine **stetige** Verteilung.

Differential– und Integralrechnung

➤ Differenziere die nachfolgenden Funktionen!

- $f(x) = -\frac{1}{5} \cdot \ln(5x + 9)$

$$f'(x) = -\frac{1}{9+5x}$$

- $f(x) = \frac{3x^2+8}{6-3x^4}$

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (6x + 16x^3 + 3x^5)}{(6 - 3x^4)^2}$$

- $f(x) = x \cdot \sin x + \cos x$

$$f'(x) = x \cdot \cos x$$

➤ Bilde die Stammfunktionen!

- $f(x) = (5x + 3) \cdot e^x$

$$F(x) = (5x - 2) \cdot e^x + c$$

- $f(y) = \frac{1}{(y+1)^2}$

$$F(y) = -\frac{1}{y+1} + c$$