

4 Differentialrechnung - Lösungen

4.1 Differenzieren Sie folgende Funktionen

$$1. f(x) = e^{3x-1} \rightarrow f'(x) = e^{3x-1} \cdot 3$$

$$2. f(x) = \frac{1-x}{2-x} \rightarrow f'(x) = \frac{-(2-x) - (1-x)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-1}{(2-x)^2}$$

$$3. f(x) = e^{1-x^3} \rightarrow f'(x) = e^{1-x^3} \cdot (-3x^2)$$

$$4. f(x) = \ln(x+1) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} \cdot 1$$

$$5. f(x) = \sqrt{x^2+3} = (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$6. f(x) = (5x+1)e^x \rightarrow f'(x) = 5e^x + (5x+1)e^x = (5x+6)e^x$$

$$7. f(x) = \frac{1}{4x+3} = (4x+3)^{-1} \rightarrow f'(x) = -(4x+3)^{-2} \cdot 4 = -\frac{4}{(4x+3)^2} \text{ (Kettenregel)}$$

oder Quotientenregel (umständlicher): $f'(x) = \frac{0 \cdot (4x+3) - 1 \cdot 4}{(4x+3)^2} = -\frac{4}{(4x+3)^2}$

$$8. f(x) = x^2e^{3x} \rightarrow f'(x) = 2xe^{3x} + x^2e^{3x} \cdot 3 = (2x+3x^2)e^{3x}$$

$$9. f(x) = x \ln x \rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$10. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = (x+2)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 = -\frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}$$

$$11. f(x) = \ln(3x+2) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x+2} \cdot 3 = \frac{3}{3x+2}$$

$$12. f(x) = e^{2x} \ln 3x \rightarrow f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot \ln 3x + e^{2x} \frac{1}{3x} \cdot 3 = 2e^{2x} \ln 3x + e^{2x} \frac{1}{x} = e^{2x} \left(2 \ln 3x + \frac{1}{x} \right)$$

$$13. f(x) = \frac{x^2+3x+2}{2x+1} \rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+1) - (x^2+3x+2) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+2x+6x+3-2x^2-6x-4}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}$$

$$14. f(x) = \ln x^4 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3 = \frac{4}{x}$$

oder besser: $f(x) = \ln x^4 = 4 \ln x \rightarrow f'(x) = 4 \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$

4.2 Kurvendiskussion

Kurvendiskussion für $f(x) = \frac{1-x}{2-x}$

1. Definitions- und Wertebereich

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$, Wertebereich später von Skizze ablesen

2. Nullstellen und Schnittpunkt mit y-Achse

NST: $x = 1$, SP mit y-Achse: $(x = 0) \quad y = \frac{1}{2}$

3. Unstetigkeiten und Verhalten an diesen Stellen

Polstelle bei $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1-x}{2-x} = \frac{-1}{-0} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1-x}{2-x} = \frac{-1}{+0} = -\infty$$

4. Verhalten im Unendlichen

Asymptote: (Polynomdivision) $f(x) = (-x + 1) : (-x + 2) = 1 + \frac{-1}{-x + 2} \rightarrow y = 1$

5. mögliche Symmetrie

Es gilt: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ keine Symmetrie

6. Extremwerte

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

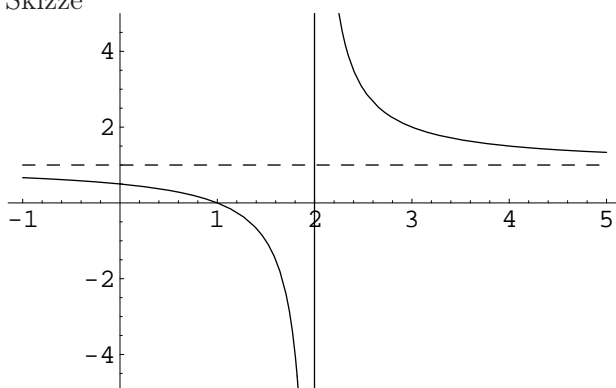
$$f'(x) = \frac{-1}{(2-x)^2} \neq 0 \text{ für alle } x \rightarrow \text{kein EW}$$

7. Wendepunkte

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{-1}{(2-x)^3} = \frac{2}{(2-x)^3} \neq 0 \text{ für alle } x \rightarrow \text{kein WP}$$

8. Skizze



Wertebereich: $W = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$

Kurvendiskussion für $f(x) = (5x + 1)e^x$

1. Definitions- und Wertebereich

$D = \mathbb{R}$, Wertebereich später von Skizze ablesen

2. Nullstellen und Schnittpunkt mit y-Achse

NST: $x = -\frac{1}{5}$, SP mit y-Achse: $(x = 0) \quad y = 1$

3. keine Unstetigkeiten

4. Verhalten im Unendlichen

$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 1)e^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x + 1)e^x = (-\infty) \cdot (+\infty) = -0$, weil die e-Funktion stärker gegen Null geht als jedes Polynom.

5. mögliche Symmetrie:

Es gilt: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ keine Symmetrie

6. Extremwerte

notwendige Bedingung: $f'(x_e) = 0$

$$f'(x) = (5x + 6)e^x = 0 \rightarrow x_e = -\frac{6}{5}$$

hinreichende Bedingung: $f''(x_e) \neq 0$

$$f''(x) = 5e^x + (5x + 6)e^x = (5x + 11)e^x$$

$$f''(-\frac{6}{5}) = 5e^{-\frac{6}{5}} > 0 \rightarrow \text{relatives Minimum } P_m \text{ in } (-1.2, -1.51)$$

7. Wendepunkte

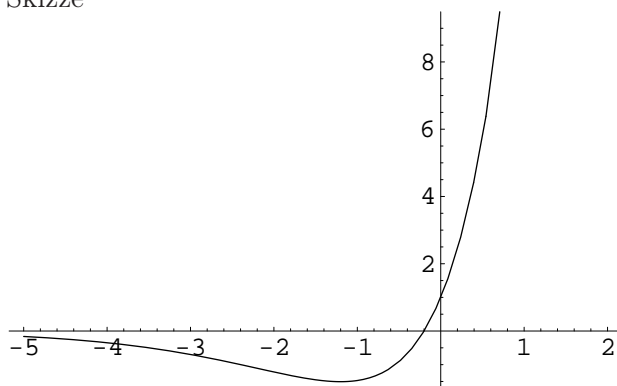
notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0$

$$f''(x) = (5x + 11)e^x = 0 \rightarrow x_w = -\frac{11}{5} \text{ hinreichende Bedingung: } f'''(x_w) \neq 0$$

$$f'''(x) = (5)e^x + (5x + 11)e^x = (5x + 16)e^x$$

$$f'''(-\frac{11}{5}) \neq 0 \rightarrow \text{Wendepunkt } P_w(-2.2, -1.11)$$

8. Skizze



Wertebereich: $y \geq x_e$

Kurvendiskussion für $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{2x + 1}$

1. Definitions- und Wertebereich

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{1}{2} \right\}, \text{ Wertebereich später von Skizze ablesen}$$

2. Nullstellen und Schnittpunkt mit y-Achse

$$\text{NST: } x_1 = -1, x_2 = -2, \text{ SP mit y-Achse: } (x = 0) \quad y = 2$$

3. Unstetigkeiten und Verhalten an diesen Stellen

Polstelle bei $x = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}+0} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{+0} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}-0} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{-0} = -\infty$$

4. Verhalten im Unendlichen

$$\text{Asymptote: (Polynomdivision) } f(x) = (x^2 + 3x + 2) : (2x + 1) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{2x + 1} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

5. mögliche Symmetrie

$$\text{Es gilt: } f(-x) \neq f(x) \text{ und } f(-x) \neq -f(x) \rightarrow \text{keine Symmetrie}$$

6. Extremwerte

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = -1.366, x_2 = 0.366$$

hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

$$f''(x) = \frac{(4x + 2)(2x + 1)^2 - (2x^2 + 2x - 1)2(2x + 1)2}{(2x + 1)^4} = \frac{(4x + 2)(2x + 1) - 4(2x^2 + 2x - 1)}{(2x + 1)^3} =$$

$$\frac{8x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4}{(2x + 1)^3} = \frac{6}{(2x + 1)^3}$$

$$f''[-1.366] < 0 \rightarrow \text{relatives Maximum } P_{max}(-1.366, 0.134)$$

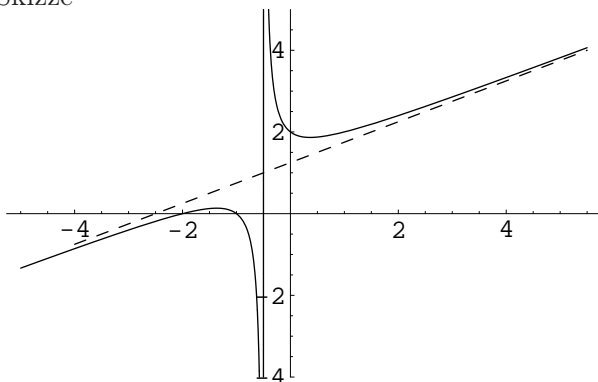
$$f''[0.366] > 0 \rightarrow \text{relatives Minimum } P_{min}(0.366, 1.866)$$

7. Wendepunkte

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{6}{(2x + 1)^3} \neq 0 \text{ für alle } x \rightarrow \text{kein WP}$$

8. Skizze



Wertebereich: alle y außer denen zwischen 0.134 und 1.866