Landesstudienkolleg Sachsen-Anhalt Abteilung Köthen	T-KURS

Feststellungsprüfung WS 2007
Fach Mathematik

Name: ____________________ *Anzahl der abgegebenen Blätter (ohne Deckblatt):* ________

Punkte: ____________________ *Note:* ________

---

1. Berechnen Sie alle Lösungen $z \in C$ der folgenden Gleichung in der arithmetischen Form.

$$(z-i)^3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{i+\sqrt{3}}$$

Stellen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

2. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (a+2)x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & (a+4)x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}$$

2.1. Untersuchen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix. Für welche reellen Zahlen a ist das Gleichungssystem
a) eindeutig lösbar,
b) nicht eindeutig lösbar,
c) nicht lösbar?

2.2. Ermitteln Sie für b) die Lösungsmenge.

2.3. Bestimmen Sie für a = 0 die zur Koeffizientenmatrix gehörende inverse Matrix A^{-1}.

3. Gegeben ist die Funktionenschar $y = f_c(x) = (2x - xc + c - 2x^2)\, e^x \quad x, c \in R$.

3.1. Untersuchen Sie f_c auf Definitionsbereich, Schnittpunkte der Graphen mit den Koordinatenachsen und Verhalten im Unendlichen.

3.2. Geben Sie ein $c \in R$ für den Fall an, dass es eine mehrfache Nullstelle gibt. Was können Sie in diesem Fall über ein Extremum sagen?

3.3. Bestimmen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte für die Funktion $f_1 \ (c = 1)$.

3.4. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_1 \ (c = 1)$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

3.5. Der Graph der Funktion $f_1 \ (c = 1)$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

4. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \sqrt{4x + 9}$.

Der Punkt $P(x; f(x))$ ist ein Punkt des Funktionsgraphen der Funktion f. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, dessen Abstand d vom Koordinatenursprung minimal ist. Der Nachweis des Minimums ist zu führen.

5. Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid 3 \mid 2)$, $B(3 \mid 2 \mid 2)$ und $C(-1 \mid 3 \mid 1)$ sowie die Gerade

$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in R$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

5.1. Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade h durch die Punkte A und B auf. Beschreiben Sie die Lage dieser Geraden im Koordinatensystem.

5.2. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h.

5.3. Die Geraden g und h liegen in der Ebene E. Geben Sie für die Ebene E eine Gleichung in Parameterform und eine Gleichung in Koordinatenform an.

5.4. Die Punkte $S_k(5 \mid 5 \mid k)$ sowie A, B und C beschreiben Pyramiden $(k \in R)$.

Geben Sie eine Gleichung für das Volumen dieser Pyramiden in Abhängigkeit von k an. Bestimmen Sie k für den Fall, dass die Punkte A, B, C und S_k keine Pyramide bilden.

5.5. Stellen Sie eine Gleichung für die Ebene F durch die Punkte A, B und $S_5 \ (k = 5)$ auf. Ermitteln Sie die Schnittgerade der Ebenen E und F.