4 Differentialrechnung - Lösungen

4.1 Differenzieren Sie folgende Funktionen

1. $f(x) = \mathrm{e}^{3x-1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^{3x-1} \cdot 3$

2. $f(x) = \frac{1-x}{2-x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-(2-x)-(1-x)(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{-1}{(2-x)^2}$

3. $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^3} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^{1-x^3} \cdot (-3x^2)$

4. $f(x) = \ln(x+1) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} \cdot 1$

5. $f(x) = \sqrt{x^2+3} = (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

6. $f(x) = (5x+1)\mathrm{e}^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 5\mathrm{e}^x + (5x+1)\mathrm{e}^x = (5x+6)\mathrm{e}^x$

7. $f(x) = \dfrac{1}{4x+3} = (4x+3)^{-1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -(4x+3)^{-2} \cdot 4 = -\dfrac{4}{(4x+3)^2}$ (Kettenregel)
   oder Quotientenregel (umständlicher): $f'(x) = \dfrac{0 \cdot (4x+3) - 1 \cdot 4}{(4x+3)^2} = -\dfrac{4}{(4x+3)^2}$

8. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{3x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x\mathrm{e}^{3x} + x^2\mathrm{e}^{3x} \cdot 3 = (2x+3x^2)\mathrm{e}^{3x}$

9. $f(x) = x\ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = (x+2)^{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 = -\dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}$

11. $f(x) = \ln(3x+2) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{3x+2} \cdot 3 = \dfrac{3}{3x+2}$

12. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\ln 3x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \cdot \ln 3x + \mathrm{e}^{2x}\dfrac{1}{3x} \cdot 3 = 2\mathrm{e}^{2x}\ln 3x + \mathrm{e}^{2x}\dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^{2x}\left(2\ln 3x + \frac{1}{x}\right)$

13. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{2x+1} \quad \rightarrow$
    $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2x+1)-(x^2+3x+2)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{4x^2+2x+6x+3-2x^2-6x-4}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}$

14. $f(x) = \ln x^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3 = \frac{4}{x}$
    oder besser: $f(x) = \ln x^4 = 4\ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 4\frac{1}{x} = \frac{4}{x}$

4.2 Kurvendiskussion

Kurvendiskussion für $\boxed{f(x) = \frac{1-x}{2-x}}$

1. Definitions- und Wertebereich
   $D = \{x \in R : \; x \neq 2\}$, Wertebereich später von Skizze ablesen

2. Nullstellen und Schnittpunkt mit y-Achse
   NST: $x = 1$, SP mit y-Achse: $(x = 0) \;\; y = \frac{1}{2}$

3. Unstetigkeiten und Verhalten an diesen Stellen
   Polstelle bei $x = 2$
   $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{1-x}{2-x} = \frac{-1}{-0} = \infty, \qquad \lim\limits_{x \to 2-0} \frac{1-x}{2-x} = \frac{-1}{+0} = -\infty$

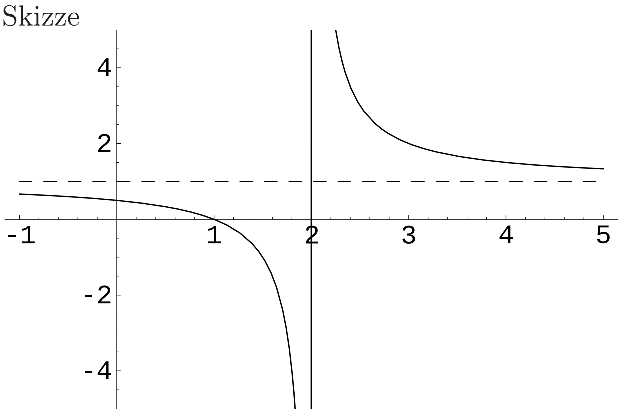
4. Verhalten im Unendlichen
   Asymptote: (Polynomdivision) $f(x) = (-x+1) : (-x+2) = 1 + \frac{-1}{-x+2} \quad \rightarrow \quad y = 1$

5. mögliche Symmetrie
   Es gilt: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x) \quad \rightarrow \quad$ keine Symmetrie

6. Extremwerte
   notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   $f'(x) = \frac{-1}{(2-x)^2} \neq 0$ für alle $x \quad \rightarrow \quad$ kein EW

7. Wendepunkte
   notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
   $f''(x) = -2 \cdot \frac{-1}{(2-x)^3} = \frac{2}{(2-x)^3} \neq 0$ für alle $x \quad \rightarrow \quad$ kein WP

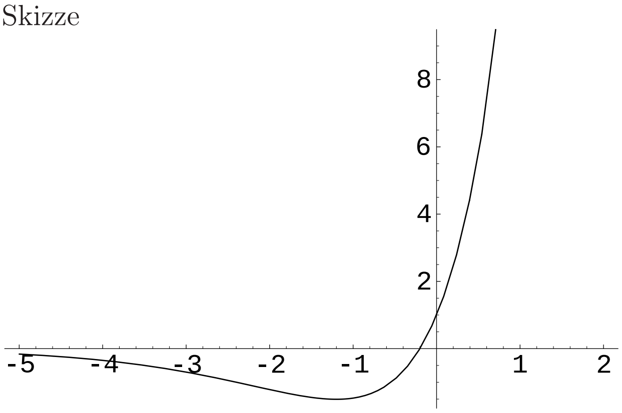
8. Skizze



   Wertebereich: $W = \{y \in R : \; y \neq 1\}$

Kurvendiskussion für $\boxed{f(x) = (5x+1)\mathbf{e}^x}$

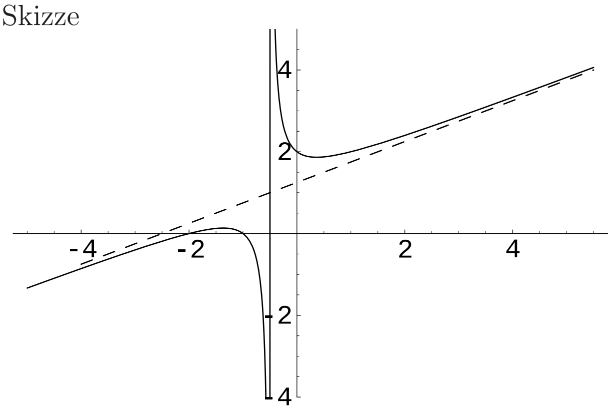
1. Definitions- und Wertebereich
   $D = R$, Wertebereich später von Skizze ablesen
2. Nullstellen und Schnittpunkt mit y-Achse
   NST: $x = -\frac{1}{5}$, SP mit y-Achse: $(x = 0)$ $y = 1$
3. keine Unstetigkeiten
4. Verhalten im Unendlichen
   $\lim\limits_{x\to\infty}(5x+1)e^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to infty}(5x+1)e^x = (-\infty)\cdot(+\infty) = -0$, weil die e-Funktion stärker gegen Null geht als jedes Polynom.
5. mögliche Symmetrie:
   Es gilt: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x) \quad \rightarrow \quad$ keine Symmetrie
6. Extremwerte
   notwendige Bedingung: $f'(x_e) = 0$
   $f'(x) = (5x+6)e^x = 0 \quad \rightarrow \quad x_e = -\frac{6}{5}$
   hinreichende Bedingung: $f''(x_e) \neq 0$
   $f''(x) = 5e^x + (5x+6)e^x = (5x+11)e^x$
   $f''(-\frac{6}{5}) = 5e^{-\frac{6}{5}} > 0 \quad \rightarrow \quad$ relatives Minimum $P_min(-1.2, -1.51)$
7. Wendepunkte
   notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0$
   $f''(x) = (5x+11)e^x = 0 \quad \rightarrow \quad x_w = -\frac{11}{5}$ hinreichende Bedingung: $f'''(x_w) \neq 0$
   $f'''(x) = (5)e^x + (5x+11)e^x = (5x+16)e^x$
   $f'''(-\frac{11}{5}) \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Wendepunkt $P_w(-2.2, -1.11)$
8. Skizze



Wertebereich: $y \geq x_e$

Kurvendiskussion für $\boxed{f(x) = \frac{x^2+3x+2}{2x+1}}$

1. Definitions- und Wertebereich
   $D = \left\{ x \in R :\ x \neq -\frac{1}{2} \right\}$, Wertebereich später von Skizze ablesen
2. Nullstellen und Schnittpunkt mit y-Achse
   NST: $x_1 = -1,\ x_2 = -2$, SP mit y-Achse: $(x = 0)\ \ y = 2$
3. Unstetigkeiten und Verhalten an diesen Stellen
   Polstelle bei $x = -\frac{1}{2}$
   $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}+0} \frac{x^2+3x+2}{2x+1} = \frac{\frac{3}{4}}{+0} = \infty, \qquad \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}-0} \frac{x^2+3x+2}{2x+1} = \frac{\frac{3}{4}}{-0} = -\infty$
4. Verhalten im Unendlichen
   Asymptote: (Polynomdivision) $f(x) = (x^2+3x+2) : (2x+1) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{2x+1} \quad \to \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$
5. mögliche Symmetrie
   Es gilt: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x) \quad \to \quad$ keine Symmetrie
6. Extremwerte
   notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   $f'(x) = \frac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2} = 0 \quad \to \quad x_1 = -1.366,\ x_2 = 0.366$
   hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$
   $f''(x) = \frac{(4x+2)(2x+1)^2 - (2x^2+2x-1)2(2x+1)2}{(2x+1)^4} = \frac{(4x+2)(2x+1) - 4(2x^2+2x-1)}{(2x+1)^3} =$
   $\frac{8x^2+8x+2-8x^2-8x+4}{(2x+1)^3} = \frac{6}{(2x+1)^3}$
   $f''[-1.366] < 0 \quad \to \quad$ relatives Maximum $P_{max}(-1.366, 0.134)$
   $f''[0.366] > 0 \quad \to \quad$ relatives Minimum $P_{min}(0.366, 1.866)$
7. Wendepunkte
   notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
   $f''(x) = \frac{6}{(2x+1)^3} \neq 0$ für alle $x \quad \to \quad$ kein WP
8. Skizze



Wertebereich: alle y außer denen zwischen 0.134 und 1.866